Doplňující úkoly z MA II.

Příklad 1. (1 bod):
Mějme metrický prostor (M, ρ). Ukažte, že platí:
(a) množiny M a $\emptyset$ jsou otevřené v M;
(b) množiny M a $\emptyset$ jsou uzavřené v M.

Příklad 2. (2 body):
Mějme funkci $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
(a) Určete definiční obor této funkce – je to otevřená, případně uzavřená množina (zdůvodněte)?
(b) Rozhodněte, zda je f spojitá, resp. zda ji lze spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$.
(c) Spočítejte parciální derivace f na celém definičním oboru.
Pokud v nějakém bodě parciální derivace neexistují, vyšetřete, zda v tomto bodě existují jednostranné parciální derivace.
(d) Lze-li funkci f spojitě dodefinovat na $\mathbb{R}^2$ (viz bod (b)), určete parciální derivace jejího rozšíření ve všech bodech $\mathbb{R}^2$.

Příklad 3. (2 body):
Funkce f a g (kde $x = f(z),\ y = g(z)$) jsou definovány podmínkami $f(2) = 1,\ g(2) = -1$ a rovnicemi

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2 \ , \qquad x + y + z = 2$$

(a) Zdůvodněte!
(b) Určete $f'(2)$ a $g'(2)$.

Příklad 4. (2 body):
Mějme následující množinu M:

$$M = \{[x, y] \in R^2;\ y = x + \ln y\}$$

(a) Pomocí věty o implicitních funkcích ukažte, že tuto množinu lze na okolí bodu $[e-1, e]$ popsat jako graf nějaké funkce φ proměnné x.
(Napište, co přesně vyplývá z věty o implicitních funkcích!)
(b) Napiště rovnici tečny (pokud existuje) ke grafu funkce φ v bodě $[e-1, e]$.

Příklad 5. (4 body):
Určete globální extrémy zadané funkce f na množině M:

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

$$M = \{[x, y, z] \in R^3;\ x^2 + y^2 \le z < 1\}$$

Postupy řádně zdůvodněte!!

Příklad 6. (2 body):
Určete primitivní funkci na maximálních intervalech, kde existuje:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cdot (1 - \cos x)} \mathrm{d}x$$

Příklad 7. (2 body):
Vypočítejte určitý integrál:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \, \mathrm{d}x$$

Pečlivě ověřte podmínky pro existenci tohoto integrálu a dále podmínky vět, podle kterých počítáte.