

5. Cvičení z MA II. (29. 10. a 1. 11. 2024)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

A. Opakování – totální diferenciál.

Totální diferenciál (též TD) v bodě a je lineární funkce, která v okolí bodu a „dobře“ aproximuje funkci f ; tato funkce se též značí, D_f , příp. $D_f(a)$, D_f^a či $df(a)$.

- Proč nám nestačí existence parc. derivací v bodě? A co je „lepší“ podmínka?
- Jaká tvrzení a věty platí pro tot. diferenciál a parciální derivace?
- Jak souvisí totální diferenciál s parciálními derivacemi?
Za jakých podmínek platí: $A_k = \frac{\partial f(a)}{\partial x_k}$ (kde A_k jsou hodnoty z definice tot. diferenciálu)
- Jak souvisí totální diferenciál s gradientem?
Za jakých podmínek platí: $D_f^a(h) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_k} h_k = \langle \nabla f(a), h \rangle$
- A jak souvisí totální diferenciál se směrovou derivací?
Za jakých podmínek platí: $D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle$

Doplnění (spojitost fce z minula) Vyšetřete, zda lze funkci $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \ln(1+xy)$ dodefinovat v nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla diferenciál.

1. (= 4. z minula) Vypočtěte totální diferenciál následujících funkcí v daném bodu a .

- (a) $f(x, y) = e^{xy}$, $a \in \mathbb{R}^2$
- (b) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$, $a \in \mathbb{R}^3$

2. (= 5. z minula) Ukažte, že pro malá x a y platí:

- (a) $(1+x)^m(1+y)^n \approx 1 + mx + ny$ ($m, n \in \mathbb{N}$)
- (b) $\ln(1+x)\ln(1+y) \approx xy$

B. Co to je směrová derivace?

Nechť $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, G je otevřená, $a \in G$ a v je vektor v $\mathbb{R}^n \setminus \{0, (\dots, 0)\}$. Směrovou derivací fce f v bodě a ve směru v -té proměnné rozumíme číslo

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \quad \text{značí se též } f'_v(a)$$

(pokud tato limita existuje).

Jak souvisí směrová derivace s parciálními derivacemi?

3. Vypočtěte derivace následujících funkcí f v zadaných směrech v v zadaných bodech a .

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ve směru $v = (-1, 1, 1)$ v bodě $a = (1, 2, -1)$

(b) $f(x, y) = e^{x-y^2}$ ve směrech $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$ v bodě $(0, 0)$

4. Určete směrové derivace funkce $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$ v bodě $(0, 0, 0)$ a směru $h = (h_1, h_2, h_3)$. Rozhodněte, zda v tomto bodě existuje totální diferenciál.

C. Tečná nadrovina

5. Anuloid $A = (x^2 + y^2 + z^2 + 12)^2 - 64(x^2 + y^2) = 0$ popište jako sjednocení grafů dvou fci dvou proměnných.

Existuje k tomuto anuloidu tečná rovina v bodě $[0, 3, \sqrt{3}]$?

Tečná nadrovina. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. Tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ rozumíme graf fce T , $x \in \mathbb{R}^n$:

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

D. Parciální derivace vyšších řádů

6. Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací - vypočítejte je pro bod $(0, 0)$:

$$f(x, y) = xy \text{ pro } |x| \geq |y| \quad \text{a} \quad f(x, y) = 0 \text{ pro } |x| < |y|$$