

1. Série domácích cvičení – termín odevzdání 12. 3. 2025

1. Dokažte, že kartézský součin množiny celých čísel (tedy množina $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) je spočetná množina. (Sestrojte například příslušnou bijekci a zdůvodněte!) (5 bodů)

2. Mějme množinu $X_Q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 100/49\}$.
 - (a) V tělese $(\mathbb{Q}, <)$ najděte $\inf X_Q$, $\sup X_Q$, $\max X_Q$ a $\min X_Q$ – pokud existují.
 - (b) Jak se výsledky změní, když zůstaneme v tělese $(\mathbb{Q}, <)$, ale v definici X_Q nahradíme množinu $\mathbb{Q}$ za $\mathbb{N}$ (označme tuto množinu X_N)?
 - (c) A nahradíme-li v definici X_Q množinu $\mathbb{Q}$ za $\mathbb{Z}$, stále v tělese $(\mathbb{Q}, <)$ (označme tuto množinu X_Z)?
 - (d) A změnil se něco, uvažujeme-li X_Q, X_N, X_Z v tělese v $(\mathbb{R}, <)$? (4 body)

3. Mějme číselnou množinu X , o které víme, že je neprázdná a má supremum. Dále mějme množinu čísel opačných, tedy $-X = \{-x \mid x \in X\}$.

Dokažte, že platí:

(5 bodů)

$$\inf\{-X\} = -\sup\{X\}$$