

## 7. Cvičení z MA I. (2. 4. 2025)

### A. Funkce – spojitost, limita

1. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

(a)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ , pokud  $a = 0, 1, +\infty, -\infty$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 1} ([x] - x)$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|}{x}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

(k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 1}{\sin x}$

2. Nechť  $f$  a  $g$  jsou funkce definované na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  takto:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 2 & \text{pro } x = 1. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pomocí definice zjistěte, zda mají tyto funkce limity v bodě 1 a případně jakou.

3. Sestrojte funkci  $f$  spojitou na  $(0, 1)$ , kterou ale nelze spojitě rozšířit na  $\langle 0, 1 \rangle$ .

**Důležité: zapamatujte si, že platí!** (dokážeme později)

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$  (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

4. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují. (Řešení na následující straně.)

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 4^x}{\sin 2x}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2-x}\right)\right)^2$

(h)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin \frac{x-3}{x^2-3x}}{x^2-3x}$

(i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$

**BONUS.** Spočítejte následující limitu (nebo dokažte, že neexistuje). (Řešení na následující straně.)

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{2x+3}\right)^{2x-1}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+7}\right)^x$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n^3+3n^2}}$

**Řešení:** (Případné nesrovnalosti prosím hlašte!)

4a.  $1/2$

4b.  $1$

4c.  $-3$

4d.  $-\ln 2$

4e.  $\ln 2$

4f.  $-1$

4g.  $\pi^2/4$

4h.  $1/3$

4i.  $0$

BONUS a.  $+\infty$

BONUS a.  $1$

BONUS a.  $1$

BONUS a.  $1$