3. Cvičení z MA I. (5. 3. 2025)

A. Metriky (z minula)

Co je to metrický prostor? Jaké má vlastnosti metrika? K čemu jsou metriky?

1. Následující předpisy definují metrické prostory (M, d):

(a) absolutní hodnota: $M = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$

(b) diskrétní metrika: $M \neq 0$, $d(x, y) = 1$ pro $x \neq y$, $d(x, y) = 0$ pro $x = y$

(c) eukleidovská metrika: $M = \mathbb{R}^n$, $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$

(d) manhattanská/součtová metrika: $M = \mathbb{R}^n$, $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

(e) maximová metrika: $M = \mathbb{R}^n$, $d_{max}(x, y) = \max\{|x_i - y_i|; 1 \leq i \leq n\}$

B. Posloupnosti a limity

Co je to posloupnost, monotónní posloupnost? Definujte vlastní a nevlastní limitu posloupnosti.

2. Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti monotónní. Spočítejte přímo podle definice jejich limity.

(a) $\{ \frac{n+1}{n+2} \}_{n=1}^{\infty}$ (b) $\{ 2n + (-1)^n \}_{n=1}^{\infty}$

3. Najděte dvě různé posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ takové, že $\{a_n\}$ je podposloupností $\{b_n\}$ a naopak.

4. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

(a) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ (b) $\lim_{n\to\infty}\cos(-1)^n$ (c) $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

(d) $\lim_{n\to\infty}\log n$ (e) $\lim_{n\to\infty}\cos^2(n\pi/4)$ (f) $\lim_{n\to\infty} n^3 - 2n^2 + 10$

(g) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n}{-n^2+4n}$

5. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení ($\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel):

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$

6. Mějme dvě posloupnoti reálných čísel $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ a číslo $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ – dokažte následující:

(a) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, pak $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = +\infty$.

(b) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ omezená, pak $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.