2. Cvičení z MA I. (26. 2. 2025)

Na webu najdete první sérii domácích úkolů – termín odevzdání 12. 3. 2025!

Přirozená, racionální a reálná čísla; spočetnost

Co to je „mohutnost“ konečné množiny a nekonečné množiny? Jak se definuje spočetnost?

1. Dokažte, že následující množiny jsou spočetné:

(a) množina celých čísel $\mathbb{Z}$;

(b) množina dvojic přirozených čísel, tedy $\mathbb{N}^2$; jak lze upravit pro racionální čísla $\mathbb{Q}$?

(c) množina všech řetězů nad abecedou $A = \{a, b\}$ (hledáme tzv. lexikografické uspořádání).

2. Ukažte, že množina všech podmnožin přirozených čísel není spočetná.

Supremum a infimum

Co to je supremum (infimum) množiny?
Co víte o množině $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ čísel z hlediska existence suprema?

3. Dokažte, že racionální čísla tvoří hustou podmnožinu reálných čísel, tedy že pro každou dvojici reálných čísel a, b ($a < b$) existuje racionální číslo q takové, že $a < q < b$.

4. Nechť A je neprázdná množina reálných čísel ($A \subseteq \mathbb{R}$, navíc $A \neq \emptyset$) taková, že neexistuje její minimum.

(a) Zapište formálně pomocí matematických symbolů výrok T „A má minimum“ a pak ho negujte.

(b) Dokažte, že A je nekonečně velká (aspoň spočetně velká).

5. Najděte suprema a infima následujících množin nad reálnými čísly (pokud existují); existují pro ně maxima a minima?

(a) $A_1 = \{-\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$ (b) $A_2 = \{\frac{n+(-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$

(c) $A_3 = \{n^{(-1)^n};\ n \in \mathbb{N}\}$ (d) $A_4 = \{q < \sqrt{3};\ q \in \mathbb{Q}\}$

Metrika a metrický prostor

Co je to metrický prostor? Jaké má vlastnosti metrika? K čemu jsou metriky?

6. Následující předpisy definují metrické prostory (M, d).

(a) absolutní hodnota: $M = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$

(b) diskrétní metrika: $M \neq 0$, $d(x, y) = 1$ pro $x \neq y$, $d(x, y) = 0$ pro $x = y$

(c) eukleidovská metrika: $M = \mathbb{R}^n$, $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$

(d) manhattanská/součtová metrika: $M = \mathbb{R}^n$, $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

(e) maximová metrika: $M = \mathbb{R}^n$, $d_{max}(x, y) = \max\{|x_i - y_i|; 1 \leq i \leq n\}$