

# 1. Cvičení z MA I. (19. 2. 2025)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

## A. Výroková logika

1. Který z následujících výroků je 'silnější', tj. implikuje druhý z výroků?

(a)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists K \in \mathbb{R}, K > 0$  takové, že platí  $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

(b)  $\exists K \in \mathbb{R}, K > 0$  takové, že  $\forall x \in \mathbb{R}$  platí  $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

2. Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

(a)  $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{N}$  platí:  $z > x \Rightarrow y < z$

(b)  $\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{N}$  platí:  $z > x \Rightarrow y < z$

(c)  $\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{R}$  platí:  $z > x \Rightarrow y < z$

3. Jak probíhá důkaz? Jak byste jednotlivé typy důkazů popsali pomocí logických výroků?

(a) Co je přímý důkaz? Dokažte pomocí přímého důkazu:  $(\forall a \in \mathbb{N} : 2|a \rightarrow 2|a^2)$ .

(b) Co je nepřímý důkaz? Dokažte pomocí nepřímého důkazu:  $(\forall a \in \mathbb{N} : 5|(a^2 + 1) \rightarrow 5 \nmid a)$ .

(c) A co je důkaz sporem? Ukažte, že  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  (kde  $\mathbb{Q}$  je těleso racionálních čísel).

## B. Zobrazení a funkce

Co je relace, zobrazení, funkce? Vlastnosti funkce: omezenost, maximum/minimum; funkce prostá a funkce 'na'.

4. Najděte příklady funkcí  $f_1, f_2, f_3$  z  $\mathbb{N}$  do  $\mathbb{N}$  s následujícími vlastnostmi:

(a)  $f_1$  je 'na', ale není prostá

(b)  $f_2$  je prostá, ale není 'na'

(c)  $f_3$  je 'na' a každé přirozené číslo má nekonečně mnoho vzorů.

5. Mějme zobrazení  $f : X \rightarrow Y$  a množiny  $A, B \subset X$ . Jaké musí mít  $f, A, B$  vlastnosti, aby platily následující vztahy?

(a)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b)  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(c) Jaký je obecný vztah mezi množinami  $A$  a  $f^{-1}(f(A))$ ?

6. Najděte funkci, která zobrazuje:

- (a) interval  $(0, 1)$  na interval  $[0, 1]$
- (b) interval  $[0, 1]$  na interval  $(0, 1)$
- (c) interval  $(0, 1)$  na interval  $(0, \infty)$
- (d) interval  $(0, 1)$  na interval  $(-\infty, \infty)$
- (e) interval  $[0, 1]$  na interval  $[0, \infty)$
- (f) interval  $(0, \infty)$  na interval  $(0, 1)$

7. Vyhovuje funkce  $f(x) = \sin x$  ( $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ) následujícímu výroku, nebo jeho negaci?

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R}, K > 0 \forall x \in \mathbb{R} : x > K \rightarrow |f(x)| < \epsilon$$