

7. cvičení z MA II. (15. 11. a 19. 11. 2024)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Věta o implicitních funkcích

Nechť $F = (F_1, \dots, F_n) : W \rightarrow \mathbb{R}^n$

je zobrazení definované na okolí $W \subset \mathbb{R}^{m+n}$ bodu (\bar{x}, \bar{y}) .

Zajímá nás (v okolí bodu $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$) řešení soustavy rovnic:

$$F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$

...

$$F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$

Nechť pro tuto $F = (F_1, \dots, F_n)$ a pro daný bod (\bar{x}, \bar{y}) platí:

(i) $F_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ pro $1 \leq i \leq n$

(ii) F_i mají spojitě parciální derivace v okolí bodu (\bar{x}, \bar{y}) pro $1 \leq i \leq n$

(iii) $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\bar{x}, \bar{y})\right) \neq 0$.

Potom existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^m$ bodu \bar{x} a okolí $V \subset \mathbb{R}^n$ bodu \bar{y} takové, že pro každý bod $x \in U$ existuje právě jeden bod $y \in V$ ($y = y(x)$) splňující $F_i(x, y) = 0$ pro $1 \leq i \leq n$.

Pak též umíme spočítat všechny derivace f v bodě \bar{x} (a tedy Taylorovy polynomy).

1. Mějme funkci $F(x, y)$ definovanou níže a bod $(\bar{x}, \bar{y}) = (6, 2)$.

Dokažte, že v nějakém okolí $U \times V$ tohoto bodu (\bar{x}, \bar{y}) existuje funkce $f = f(x)$, pro kterou platí $f(\bar{x}) = \bar{y}$ a navíc $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$.

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4$$

Určete $f'(\bar{x})$ a $f''(\bar{x})$.

2. Mějme dvě funkce f, g , kde $x = f(z)$, $y = g(z)$. Určete, zda je možné tyto funkce definovat následujícími podmínkami:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2$$

$$x + y + z = 2$$

$$f(2) = 1, \quad g(2) = -1$$

Pokud to lze, určete $f'(2)$, $g'(2)$ a $f''(2)$, $g''(2)$.

3. Ukažte, že zadanou množinu M lze na okolí bodu $a = (1, 0)$ popsat jako graf funkce $f = f(x)$, kde $f(1) = 0$.

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\}$$

Spočtěte její parciální derivace prvního a druhého řádu v příslušném bodu.

Extrémy funkcí více proměnných.

Kde budeme hledat body „podezřelé“ z extrému?

4. Najděte všechny globální a lokální extrémy následujících funkcí na definičním oboru (případně dodefinujte, kde lze spojitě dodefinovat):

(a) $f(x, y) = x(3 - x^2) - y^2$

(b) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$

5. Vyšetřete extrémy následující funkce f na zadané množině M :

$$f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2 \quad \text{na} \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + 2x + y^2 = 0\}$$