4. Cvičení z MA II. (22. 10. a 25. 10. 2024)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Totální diferenciál.
Řekneme, že funkce funkce $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in G$ **(totální) diferenciál**, existuje-li funkce μ spojitá v okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $o = (0, ...0)$ taková, že $\mu(o) = 0$, a čísla $A_1, \dots A_n$ pro která platí

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} A_k h_k + \|h\| \mu(h).$$

Čísla A_k $(k = 1, ..n)$ nám dávají lineární funkci L, která v bodě a „dobře“ aproximuje funkci f (této funkci se též říkává tot. diferenciál a značívá se D_f, příp. $D_f(a)$ či D_f^a).
Jak souvisí totální diferenciál s parciálními derivacemi? Jak souvisí totální diferenciál s gradientem?

Pro zahřátí: Mějme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou předpisem:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x = 0 \ \vee \ y = 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0 \end{cases}$$

(a) Vyšetřete její spojitost.
(b) Spočítejte parciální derivace v bodech mimo přímky $x = 0$ a $y = 0$, v bodech ležících na těchto přímkách mimo bod $(0, 0)$ a v bodě $(0, 0)$.
(c) Spočítejte směrové derivace ve směru $(1, 1)$ mimo přímky $x = 0$ a $y = 0$ a v bodě $(0, 0)$.
(d) Jak je to s totálním diferenciálem v bodu $(0, 0)$?

1. Ověřte podle definice, že lineární funkce $L(h_1, h_2) = 2(h_1 + h_2)$ je diferenciálem funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $(1, 1)$.

2. Buď dána funkce

$$f : (x, y) = \log(\sqrt{y+1} - x)$$

(a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
(b) Vypočítejte gradient $\nabla f(x, y)$ v bodě $[0, 0]$.
Pokud má f v tomto bodě totální diferenciál, určete ho.
(c) Určete rovnici tečné roviny v bodě $[0, 0]$.
(d) Vypočítejte přibližně pomocí lineární aproximace $f(-0,04; 0,02)$.

3. Vyšetřete, zda lze funkci $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \ln(1 + xy)$ dodefinovat v nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla diferenciál.

4. Vypočtěte totální diferenciál následujících funkcí f. Jak lze funkci f pomocí tot. diferenciálu odhadnout v okolí bodu $a \in \mathbb{R}^2$, resp. $a \in \mathbb{R}^3$?

(a) $f(x,y) = e^{xy}$ (b) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$

5. Ukažte, že pro malá x a y platí:

(a) $(1+x)^m(1+y)^n \approx 1 + mx + ny$

(b) $\ln(1+x)\ln(1+y) \approx xy$