

2. Cvičení z MA II. (8. a 11. 10. 2024)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

1. domácí úkol (termín 22., resp. 25.10. 2024)

A. Ještě metrické prostory

Co je metrický prostor a jak se definují otevřené a uzavřené množiny? Co jsou vzory a obrazy pro zobrazení mezi metrickými prostory?

1. Mějme metrický prostor (M, ρ) . Zdůvodněte následující:

- M, \emptyset jsou otevřené i uzavřené v M .
- Sjednocení libovolného souboru otevřených množin je otevřená množina.
- Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.
- Obdobná tvrzení platí pro uzavřené množiny (konečné sjednocení, libovolný průnik).

2. Platí následující tvrzení? Dovedete zdůvodnit?

- Množina $B(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) < r\}$ (pro $r > 0$) je otevřená množina metrického prostoru (M, d) .
- Množina $B'(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}$ (pro $r > 0$) je uzavřená množina metrického prostoru (M, d) .
- Jednobodové množiny jsou uzavřené množiny metrického prostoru (M, d) .
- Jak vypadají otevřené množiny v metrickém prostoru (M, d) , jehož každý bod je izolovaným bodem? (Bod a je izolovaným bodem množiny $A \subseteq M$, pokud $\exists r > 0$ takové, že $B(a, r) \cap A = \{a\}$.)

3. Jaký je vztah mezi následujícími množinami – množinou $\overline{A \cap B}$ a množinou $\overline{A} \cap \overline{B}$?

B. Spojitost reálných funkcí více proměnných

Jak se definuje spojitě zobrazení? Jaká tvrzení o spojitých zobrazeních znáte? (skládání spoj. funkcí, charakteristika pomocí vzorů, charakteristika pomocí konv. posloupností)

4. Ukažte, že polynomy více proměnných jsou spojitě funkce $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (pro jednoduchost se omezme na polynomy dvou proměnných).

5. Zkoumejte následující funkci $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (kde na \mathbb{R}^2 uvažujeme např. eukleidovskou metriku):

$$f(x, y) = \sqrt{\log(x - y)} .$$

Určete definiční obor této funkce (jde o ot. či uz. množinu?), spojitost, vrstevnice. Nabývá tato funkce na svém definičním oboru globálního maxima a minima?

6. Lze následující funkce dodefinovat tak, aby byly na \mathbb{R}^2 spojité? Jak? Jsou tyto funkce omezené? Nabývají tam své největší a nejmenší hodnoty (pokud ano, jaké)?

(a) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

(b) $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

C. Parciální derivace

Parciální derivace. Necht $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, G je otevřená, $a \in G$ a $e^i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ je i -tý vektor kanonické báze \mathbb{R}^n . *Parciální derivací funkce f podle i -té proměnné v bodě a* rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}$$

(pokud tato limita existuje).

Značení: $C^1(G)$... množina funkcí, které mají pro každý bod $a \in G$ spojité parc. derivace podle všech proměnných (tj. funkce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ jsou spojité jako funkce n proměnných).

7. Určete definiční obor následujících funkcí na \mathbb{R}^n , vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují. V zadaném bodě vyčíslete.

(a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ v bodě $[1, -2]$

(b) $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$ v bodě $[e, 1, 2]$. Vypočtěte též parciální derivace 2. řádu!