

8. Cvičení z MA I. (11. 4. 2024)

Derivace funkcí

Co to je a jak se počítá derivace – aritmetika derivací, derivace složené funkce, derivace inverzní funkce. Co je jednostranná derivace a jak se počítá?

1. Z definice určete ve všech bodech definičního oboru funkcí (jednostranné) derivace.

- (a) $\operatorname{sgn} x$ (b) $|x|$ (c) $\frac{1}{x^2}$

VZOREČKY (elementární funkce):

$$\begin{aligned}(x^a)' &= a \cdot x^{a-1} && \text{pro } x \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}; \\(e^x)' &= (e^x) && \text{pro } x \in \mathbb{R}; \\(\ln x)' &= \frac{1}{x} && \text{pro } x \in \mathbb{R}^+; \\(\sin x)' &= \cos x && \text{pro } x \in \mathbb{R}; \\(\cos x)' &= -\sin x && \text{pro } x \in \mathbb{R}; \\(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} && \text{pro } x \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right).\end{aligned}$$

VZOREČKY (aritmetika derivací, derivace složené funkce a derivace inv. funkce):

$f, g : U(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce, které mají v bodě a derivaci (vlastní či nevlastní)

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= f'(a) + g'(a), && \text{je-li pravá strana definovaná;} \\(f \cdot g)'(a) &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a), && \text{je-li pravá strana definovaná a } f \text{ nebo } g \text{ je spoj. v } a; \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}, && \text{je-li } g \text{ spojitá v } a \text{ a } g(a) \neq 0; \\(f \circ g)'(a) &= f'(g(a)) \cdot g'(a), && \text{má-li } g \text{ derivaci v } a, f \text{ derivaci v } b, \text{ kde } b = g(a), \\ &&& \text{a je-li pravá strana definovaná;} \\(f^{-1})'(b) &= \frac{1}{f'(a)}, && \text{je-li } b = f(a) \text{ a fce } f \text{ má v } a \text{ nenulovou derivaci } f'(a).\end{aligned}$$

2. Určete ve všech bodech definičního oboru funkcí, zda existují (jednostranné) derivace, případně čemu se rovnají. Lze tyto funkce spojitě rozšířit?

- (a) $\frac{1-x}{x+1}$ (b) $\left|\frac{x-1}{1-2x}\right|$ (c) $\sqrt{\sin x \cos x}$ (d) $|x-2| - 2 \cdot \operatorname{arctg} x$
- (e)
$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle; \\ \frac{1}{e} & \text{pro všechna ostatní } x. \end{cases}$$

3. Odvoďte následující vztahy:

- (a) Víme, že $(\exp(x))' = \exp(x)$ a také $\exp(0) = 1$.

Pomocí definice derivace funkce \exp dokažte vzorec z minulého cvičení $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- (b) Použijte větu o derivaci inverzní funkce a odvoďte vzorec pro derivaci funkce $\ln x$.

Pomocí věty o derivaci inverzních funkcí ověřte a **VZOREČKY** si zapamatujte!:

- (c) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$

- (d) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$

4. Ve všech bodech definičního oboru funkcí spočítejte (jednostranné) derivace:

- (a) $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$ (b) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ (c) $\sqrt[3]{(1 - \exp(1-x^2))^2}$ (d) $\sqrt{1 - \exp(-x^2)}$

Bonusové video: Jak vyřešit viklající se stůl v pivní zahrádce (aplikace Darbouxovy věty o nabývání mezihodnot (přednáška 6, věta 8) <https://www.youtube.com/watch?v=OuF-WB7mD6k>