

## 12. Cvičení z MA I. (9. 5. 2024)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

### Primitivní funkce

DEF: Mějme funkci  $f$  definovanou na otevřeném neprázdném intervalu  $I$ . Existuje-li na tomto intervalu funkce  $F$ , která má pro všechna  $x \in I$  vlastní derivaci a platí  $F'(x) = f(x)$ , řekneme, že  $F$  je na  $I$  primitivní k  $f$ .

V: Je-li  $F$  na  $I$  primitivní funkce k nějaké funkci  $f$ , pak je  $F$  na  $I$  spojitá.

V: Spojitá funkce  $f$  na otevřeném neprázdném intervalu  $I$  má na tomto intervalu primitivní funkci (tj. podmínka postačující, nikoli nutná).

V: Má-li funkce  $f$  na intervalu  $I$  primitivní funkci, pak je obraz  $f(I)$  též interval (tedy funkce má Darbouxovu vlastnost, tj. nabývá mezhodnot).

Metody pro výpočet primitivní funkce:

- tabulkové integrály (viz)
- per partes
- substituce ... zde jen 1. typu
- rozklad na parc. zlomky (zde jen pro rac. lomené funkce s  $\mathbb{R}$  kořeny)

---

1. Určete primitivní funkce k následujícím funkcím (na největších možných intervalech):

- (a)  $\int x^3 + 2x + \frac{16}{x} dx$     (b)  $\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3 \cos x dx$     (c)  $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$   
(d)  $\int (3e^x + \frac{1}{x}) dx$     (e)  $\int (\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{x}) dx$     (f)  $\int \frac{x^2-1}{x} dx$     (g)  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$   
(h)  $\int (\sqrt[3]{x} + x^2) dx$     (i)  $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$     (j)  $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$

2. ‘Lepení’ primitivních funkcí – určete primitivní funkce na největším možném intervalu:

- (a)  $\int |x| dx$     (b)  $\int |\cos x| dx$

3. Určete primitivní funkce: metoda per partes:

- (a)  $\int x \sin x dx$     (b)  $\int (x^2 - x) \exp(x) dx$     (c)  $\int \exp(x)(\sin x + \cos x) dx$   
(d)  $\int \ln |1 + x| dx$     (e)\*  $\int \sqrt{x} \cdot \ln^2 x dx$     (f)\*  $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

4. Určete primitivní funkce: metoda substituce

- (a)  $\int 2x \cdot \exp(-x^2) dx$     (b)  $\int \sqrt[3]{1-3x} dx$     (c)  $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$   
(d)  $\int \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}} dx$     (e)  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$     (f)  $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx$   
(g)  $\int \operatorname{tg} x dx$     (h)  $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$     (i)  $\int \exp(\sqrt{x}) dx$

5. Určete primitivní funkce: doplnění na čtverec a rozklad na parciální zlomky

- (a)  $\int \frac{x^2+2x}{x+3} dx$     (b)  $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx$     (c)  $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$   
(d)\*  $\int \frac{1}{(3x^2-2x-1)} dx$     (e)\*  $\int \frac{3x+4}{x^2+3x+5} dx$     (f)  $\int \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}} dx$