

10. cvičení z MA II. (4. 12. 2023)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

A. Extrémy funkcí více proměnných a vázané extrémy.

1. Nalezněte maximum a minimum funkce $f(x, y, z) = xyz$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ \& } x + y + z = 0\}$.

2. Vyšetřete globální extrémy následující funkce $f(x, y) = (x + y) \exp(-(x^2 + y^2))$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ \& } |x| \leq y + 1\}$.

B. Aproximace pomocí Taylorovy řady.

Taylorova řada pro funkci jedné proměnné (definice): Necht $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce definovaná na nějakém okolí a , která má v tomto bodě vlastní derivaci všech řádů. Pak Taylorovou řadou v bodě a rozumíme následující řadu, kde $x \in \mathbb{R}$:

$$T^{f,a}(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Taylorova řada pro funkci více proměnných:

Necht $a \in \mathbb{R}^n$ a $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce definovaná na nějakém okolí a , která má v tomto bodě spojitě parciální derivace libovolného řádu. Pak Taylorovou řadou v bodě a rozumíme následující řadu (kde $x \in \mathbb{R}^n$):

$$T^{f,a}(x) = f(a) + \frac{1}{1!} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} (x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \dots$$

3. Aproximujte následující funkce f v okolí daného bodu a :

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a = 0$

(i) $f(x) = \sin(x)$

(ii) $f(x) = \exp(x)$

(iii) $f(x) = \ln(1 + x)$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x \cdot \exp(x + y)$, $a = (0, 0)$

(c) Lze aproximovat i funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$? Jak?