

13. cvičení z MA II. (8. 1. 2023)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Riemannův integrál ve více proměnných.

Jak je definovaný vícerozměrný integrál? Kdy existuje?

A jak lze spočítat vícerozměrný integrál pomocí integrálu jedné proměnné?

1. Spočítejte z definice:

$$\int_{\langle a,b \rangle \times \langle c,d \rangle} f(x,y) \, dx dy, \quad \text{kde } f(x,y) = c$$

2. Spočítejte následující integrály (proměnné značíme po řadě x a y) – postup zdůvodněte !

$$(i) \int_{\langle -1,3 \rangle \times \langle 0,2 \rangle} (x+y^2) \, dx dy \quad (ii) \int_{\langle 0,\pi \rangle \times \langle 0,1 \rangle} x \sin(xy) \, dx dy$$

3. Pozor na pořadí – spočítejte následující integrál (proměnné opět po řadě x a y):

$$\int_{\langle 0,1 \rangle \times \langle 1,2 \rangle} (x^y) \, dx dy \quad (\text{pro } y > 0 \text{ klademe } 0^y = 0)$$

4. Mějme funkci $f(x,y,z) = z \sin(x+y)$ a množinu $J = J_1 \times J_2 \times J_3$ danou nerovnostmi $0 \leq x \leq \pi$, $|y| \leq \frac{\pi}{2}$ a $0 \leq z \leq 1$. Spočítejte následující integrál:

$$\int_J f(x,y,z) \, dx dy dz = \int_J z \sin(x+y) \, dx dy dz.$$

5. Mějme množinu $D \subseteq \mathbb{R}^2$, která je ohraničena přímkami $x = 0$, $x = 2\pi$, $y = 0$ a grafem funkce $y = 2 + \sin(x)$. Vypočítejte Riemannův integrál I .

$$I = \int_D \frac{y}{3} \, dx dy$$

(Nakreslete D a rozmyslete si, zda vůbec integrál I existuje – jak budeme postupovat, když umíme integrovat jen na “cihlách”?)

6. Mějme uzavřenou oblast $D \subseteq J_1 \times J_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, $D = \{(x,y) \mid y \geq x-1 \text{ \& } y^2/2 - 6 \leq x\}$. Vypočítejte Riemannův integrál I .

$$I = \int_D xy \, dx dy$$

(Nakreslete D a rozmyslete si, zda vůbec integrál I existuje – jak budeme postupovat, když umíme integrovat jen na “cihlách”?)