

## 8. cvičení z MA II. (20. 11. 2023)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

### Věta o implicitních funkcích

Nechť  $F = (F_1, \dots, F_n) : W \rightarrow \mathbb{R}^n$

je zobrazení definované na okolí  $W \subset \mathbb{R}^{m+n}$  bodu  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

Zajímá nás (v okolí bodu  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ ) řešení soustavy rovnic:

$$F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$

...

$$F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$

Nechť pro tuto  $F = (F_1, \dots, F_n)$  a pro daný bod  $(\bar{x}, \bar{y})$  platí:

(i)  $F_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  pro  $1 \leq i \leq n$

(ii)  $F_i$  mají spojitě parciální derivace v okolí bodu  $(\bar{x}, \bar{y})$  pro  $1 \leq i \leq n$

(iii)  $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\bar{x}, \bar{y})\right) \neq 0$ .

Potom existuje okolí  $U \subset \mathbb{R}^m$  bodu  $\bar{x}$  a okolí  $V \subset \mathbb{R}^n$  bodu  $\bar{y}$  takové, že pro každý bod  $x \in U$  existuje právě jeden bod  $y \in V$  ( $y = y(x)$ ) splňující  $F_i(x, y) = 0$  pro  $1 \leq i \leq n$ .

Pak též umíme spočítat všechny derivace  $f$  v bodě  $\bar{x}$  (a tedy Taylorovy polynomy).

**1.** Mějme funkci  $F(x, y)$  definovanou níže a bod  $(\bar{x}, \bar{y}) = (6, 2)$ .

Dokažte, že v nějakém okolí  $U \times V$  tohoto bodu  $(\bar{x}, \bar{y})$  existuje funkce  $f = f(x)$ , pro kterou platí  $f(\bar{x}) = \bar{y}$  a navíc  $F(x, f(x)) = 0$  pro všechna  $x \in U$ .

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4$$

Určete  $f'(\bar{x})$  a  $f''(\bar{x})$ .

**2.** Mějme dvě funkce  $f, g$ , kde  $x = f(z)$ ,  $y = g(z)$ . Určete, zda je možné tyto funkce definovat následujícími podmínkami:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2$$

$$x + y + z = 2$$

$$f(2) = 1, \quad g(2) = -1$$

Pokud to lze, určete  $f'(2)$ ,  $g'(2)$  a  $f''(2)$ ,  $g''(2)$ .

**3.** Ukažte, že zadanou množinu  $M$  lze na okolí bodu  $a = (1, 0)$  popsat jako graf funkce  $f = f(x)$ , kde  $f(1) = 0$ .

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\}$$

Spočítejte její parciální derivace prvního a druhého řádu v příslušném bodu.

### Extrémy funkcí více proměnných.

Kde budeme hledat body „podezřelé“ z extrému?

**4.** Najděte všechny globální a lokální extrémy následujících funkcí na definičním oboru (případně dodefinujte, kde lze spojitě dodefinovat):

(a)  $f(x, y) = x(3 - x^2) - y^2$

(b)  $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$

**5.** Vyšetřete extrémy následují funkce  $f$  na zadané množině  $M$ :

$$f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2 \quad \text{na} \quad M = \{[x, y] \in R^2; x^2 + 2x + y^2 = 0\}$$