

9. cvičení z MA II. (27. 11. 2023)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Extrémy funkcí více proměnných.

Kde budeme hledat body „podezřelé“ z extrému?

1. (=4b. z minula) Najděte všechny body podezřelé z extrému, případně určete též lokální a globální extrémy následující funkce f (na celém definičním oboru):

(a) $f(x, y) = x(3 - x^2) - y^2$

(b) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$

2. (=5a. z minula, b nové) Vyšetřete lokální a globální extrémy následujících funkcí f na zadaných množinách M :

(a) $f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2$ na $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 2x + y^2 = 0\}$

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + e^{-x^2} - 1 = 0\}$

Metoda Lagrangeových multiplikátorů.

Mějme reálné funkce $f, g_1, \dots, g_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina). Nechť tyto funkce mají na U spojitě parc. derivace. Předpokládejme dále, že vektory $\nabla g_1, \dots, \nabla g_k$ jsou lineárně nezávislé. Potom platí:

Nabývá-li funkce f v bodě $a = (a_1, \dots, a_n)$ lokálního extrému vázaného podmínkami

$$g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0,$$

pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ taková, že pro všechna $i = 1, \dots, n$ platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) = 0$$

(JINAK: Lagrangeova funkce $L = f + \langle \lambda, g \rangle$ má v a stacionární bod, tedy její parc. derivace jsou tam nulové.)

3. Zjistěte lokální extrémy funkcí na zadaných množinách – využijte Lagrangeovy multiplikátory.

(a) $f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 = 0\}$.

(b) $f(x, y) = y$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$