

7. cvičení z MA II. (13. 11. 2023)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

A. Rozcvička a opakování

- (a) Vypočtete směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg} xy$ ve směru $v = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ a v bodě $a = (1, 1)$. Jak souvisí totální diferenciál se směrovou derivací?
- (b) Vypočtete totální diferenciál funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ v bodě $a = (1, 2, -1)$; jaká bude jeho hodnota ve směru $h = (-1, 1, 1)$?
- (c) Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ v bodě $(1, 1, ?)$.

B. Řetízkové pravidlo.

2. Mějme funkce $f, g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, kde:

$$f(x, y) = xe^{x+y}$$

$$g_1(r, s) = r \cos(s)$$

$$g_2(r, s) = r \sin(s)$$

Složením dostaneme funkci $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $H(r, s) = f(g_1(r, s), g_2(r, s))$

- (a) Spočítejte „postaru“ její parciální derivace.
- (b) Pomocí řetízkového pravidla spočítejte parciální derivace funkce H .
- (c) Spočítejte totální diferenciál funkce H .
- (d) Aproximujte pro malá ϵ hodnotu $H(1 + \epsilon, \epsilon)$ (pomocí totálního diferenciálu).

3. Mějme funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = x + xy + y/x$$

$$g(r, s) = (\sin(rs), r - s)^T$$

Spočítejte všechny parciální derivace složené funkce $H = f \circ g$. Užijte maticové značení z přednášky! Jak toto souvisí s aproximací lineární funkcí?

C. Záměnnost parciálních derivací vyšších řádů

4. Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací - vypočítejte je pro bod $(0, 0)$:

$$f(x, y) = xy \text{ pro } |x| \geq |y| \quad \text{a} \quad f(x, y) = 0 \text{ pro } |x| < |y|$$