

## 6. cvičení z MA II. (6. 11. 2023)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

### A. Opakování – totální diferenciál.

Totální diferenciál (též  $TD$ ) v bodě  $a$  je lineární funkce, která v okolí bodu  $a$  „dobře“ aproximuje funkci  $f$ ; tato funkce se též značí,  $D_f$ , příp.  $D_f(a)$ ,  $D_f^a$  či  $df(a)$ .

- Proč nám nestačí existence parc. derivací v bodě? A co je „lepší“ podmínka?
- Jaká tvrzení a věty platí pro tot. diferenciál a parciální derivace?
- Jak souvisí totální diferenciál s parciálními derivacemi?  
Za jakých podmínek platí:  $A_k = \frac{\partial f(a)}{\partial x_k}$  (kde  $A_k$  jsou hodnoty z definice tot. diferenciálu)
- Jak souvisí totální diferenciál s gradientem?  
Za jakých podmínek platí:  $D_f^a(h) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_k} h_k = \langle \nabla f(a), h \rangle$
- A jak souvisí totální diferenciál se směrovou derivací?  
Za jakých podmínek platí:  $D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle$

---

**Doplnění (spojitost fce z minula)** Vyšetřete, zda lze funkci  $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \ln(1+xy)$  dodefinovat v nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla diferenciál.

**1. (= 4. z minula)** Vypočtěte totální diferenciál následujících funkcí v daném bodu  $a$ .

- (a)  $f(x, y) = e^{xy}$ ,  $a \in \mathbb{R}^2$
- (b)  $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ ,  $a \in \mathbb{R}^3$

**2. (= 5. z minula)** Ukažte, že pro malá  $x$  a  $y$  platí:

- (a)  $(1+x)^m(1+y)^n \approx 1 + mx + ny$
- (b)  $\ln(1+x)\ln(1+y) \approx xy$

---

### B. Co to je směrová derivace?

Nechť  $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G$  je otevřená,  $a \in G$  a  $v$  je vektor v  $\mathbb{R}^n \setminus \{0, (\dots, 0)\}$ . Směrovou derivací fce  $f$  v bodě  $a$  ve směru  $v$ -té proměnné rozumíme číslo

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \quad \text{značí se též } f'_v(a)$$

(pokud tato limita existuje).

Jak souvisí směrová derivace s parciálními derivacemi?

**3.** Vypočtěte derivace následujících funkcí  $f$  v zadaných směrech  $v$  v zadaných bodech  $a$ .

(a)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$  ve směru  $v = (-1, 1, 1)$  v bodě  $a = (1, 2, -1)$

(b)  $f(x, y) = e^{x-y^2}$  ve směrech  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(1, 1)$  v bodě  $(0, 0)$

4. Určete směrové derivace funkce  $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$  v bodě  $(0, 0, 0)$  a směru  $h = (h_1, h_2, h_3)$ . Rozhodněte, zda v tomto bodě existuje totální diferenciál.

---

### C. Tečná nadrovina

5. Anuloid  $A = (x^2 + y^2 + z^2 + 12)^2 - 64(x^2 + y^2) = 0$  popište jako sjednocení grafů dvou fčí dvou proměnných.

Existuje k tomuto anuloidu tečná rovina v bodě  $[0, 3, \sqrt{3}]$ ?

*Tečná nadrovina.* Necht  $G \subset R^n$  otevřená,  $a \in G$ ,  $f \in C^1(G)$ . *Tečnou nadrovinou ke grafu funkce  $f$  v bodě  $[a, f(a)]$  rozumíme graf fce  $T$ ,  $x \in R^n$ :*

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

---

### D. Parciální derivace vyšších řádů

6. Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací - vypočítejte je pro bod  $(0, 0)$ :

$$f(x, y) = xy \text{ pro } |x| \geq |y| \quad \text{a} \quad f(x, y) = 0 \text{ pro } |x| < |y|$$