

### 3. Cvičení z MA II. (16. 10. 2023)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

**Domácí úkol – 1. sada ... termín 30. 10. 2023 ve 12 hodin**

#### A. Ještě metrické prostory

Co je metrický prostor a jak se definují otevřené a uzavřené množiny? Co jsou vzory a obrazy pro zobrazení mezi metrickými prostory?

1. Mějme metrický prostor  $(M, \rho)$ . Zdůvodněte následující:

- (a)  $M, \emptyset$  jsou otevřené i uzavřené v  $M$ .
- (b) Sjednocení libovolného souboru otevřených množin je otevřená množina.
- (c) Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.
- (d) Obdobná tvrzení platí pro uzavřené množiny (konečné sjednocení, libovolný průnik).

#### 2. (= 4. z minulého týdne)

Platí následující tvrzení? Dovedete zdůvodnit?

- (a) Množina  $B(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) < r\}$  (pro  $r > 0$ ) je otevřená množina metrického prostoru  $(M, d)$ .
- (b) Množina  $B'(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}$  (pro  $r > 0$ ) je uzavřená množina metrického prostoru  $(M, d)$ .
- (c) Jednobodové množiny jsou uzavřené množiny metrického prostoru  $(M, d)$ .
- (d) Jak vypadají otevřené množiny v metrickém prostoru  $(M, d)$ , jehož každý bod je izolovaným bodem? (Bod  $a$  je izolovaným bodem množiny  $A \subseteq M$ , pokud  $\exists r > 0$  takové, že  $B(a, r) \cap A = \{a\}$ .)

3. Jaký je vztah mezi následujícími množinami – množinou  $\overline{A \cap B}$  a množinou  $\overline{A} \cap \overline{B}$ ?

#### B. Spojitost reálných funkcí více proměnných

Jak se definuje spojitě zobrazení? Jaká tvrzení o spojitých zobrazeních znáte? (skládání spoj. funkcí, charakteristika pomocí vzorů, charakteristika pomocí konv. posloupností)

4. Ukažte, že polynomy více proměnných jsou spojitě funkce  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (pro jednoduchost se omezme na polynomy dvou proměnných).

5. Zkoumejte následující funkci  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (kde na  $\mathbb{R}^2$  uvažujeme např. eukleidovskou metriku):

$$f(x, y) = \sqrt{\log(x - y)} .$$

Určete definiční obor této funkce (jde o ot. či uz. množinu?), spojitost, vrstevnice. Nabývá tato funkce na svém definičním oboru globálního maxima a minima?

**6.** Lze následující funkce dodefinovat tak, aby byly na  $\mathbb{R}^2$  spojité? Jak? Jsou tyto funkce omezené? Nabývají tam své největší a nejmenší hodnoty (pokud ano, jaké)?

(a)  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

(b)  $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

### C. Parciální derivace

**Parciální derivace.** Necht  $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G$  je otevřená,  $a \in G$  a  $e^i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$  je  $i$ -tý vektor kanonické báze  $\mathbb{R}^n$ . *Parciální derivací funkce  $f$  podle  $i$ -té proměnné v bodě  $a$*  rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}$$

(pokud tato limita existuje).

Značení:  $C^1(G)$  ... množina funkcí, které mají pro každý bod  $a \in G$  spojité parc. derivace podle všech proměnných (tj. funkce  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  jsou spojité jako funkce  $n$  proměnných).

**7.** Určete definiční obor následujících funkcí na  $\mathbb{R}^n$ , vyšetřete jejich spojitost a vypočtete parciální derivace všude, kde existují. V zadaném bodě vyčíslete.

(a)  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$  v bodě  $[1, -2]$

(b)  $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$  v bodě  $[e, 1, 2]$ . Vypočtete též parciální derivace 2. řádu!